Казанский государственный университет
им. В.И.Ульянова-Ленина
Физический факультет

БАЛАКИН А.Б.

ТРИ ЛЕКЦИИ
ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Учебно-методическое пособие к курсу

Методы математической физики.
Специальные функции.

(Конспект лекций)

Казань - 2009

УДК 517.5

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ГОУ ВПО «Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина»

методической комиссии физического факультета
Протокол N 4 от 21 сентября 2009 г.

заседания кафедры теории относительности и гравитации
Протокол N 9 от 18 сентября 2009 г.

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук, проф. КГУ Ю.В. Обносов

Балакин А.Б.
Три лекции по теории функций Бесселя: Учебно-методическое пособие / А.Б. Балакин. - Казань: Казанский государственный университет, 2009. - 39 с.

Предназначено для студентов и аспирантов физического факультета Казанского государственного университета.

Краткое предисловие

Теория функций Бесселя вправе называться жемчужиной *теории специальных функций*, которая является ключевым элементом курса *математической физики*. В ставших классическими монографиях Г.Н. Ватсона [1], Г.Бейтмена и А.Эрдейи [2], Н.Н.Лебедева [3], А.Н.Тихонова и А.А.Самарского [4], Н.С.Кошлякова, Э.Б.Глинера и М.М.Смирнова [5] читатель найдет исчерпывающую информацию о функциях Бесселя, их свойствах и приложениях. Основываясь на собственном опыте преподавания математической физики студентам физического факультета КГУ, автор предлагает вниманию студентов и аспирантов свою версию изложения лекций по теории функций Бесселя, которые, с одной стороны, не отягощены излишней детализацией свойств этих функций, но с другой стороны содержат все самые важные и принципиальные моменты, необходимые в дальнейшем для изучения различных аспектов *теоретической физики*.

ЛЕКЦИЯ I.
Цилиндрические функции как фундаментальные решения дифференциального уравнения Бесселя

1.1. Дифференциальные уравнения, определяющие функции Бесселя

В математической физике широко известны дифференциальное уравнение, названное в честь немецкого астронома, геодезиста и математика Фридриха Вильгельма Бесселя (Bessel) (1784-1846)

$$x^2 \, \frac{d^2 y}{dx^2} + x \, \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0 \,, \tag{1}$$

и модифицированная версия этого уравнения

$$x^2 \, \frac{d^2 y}{dx^2} + x \, \frac{dy}{dx} - \left(x^2 + \nu^2\right) y = 0 \,. \tag{2}$$

При замене независимой переменной x на $-x$ структура этих уравнений остается неизменной, поэтому в дальнейшем будем полагать, что искомая функция $y(x)$ определена на положительной части действительной оси. Поскольку коэффициент при старшей производной обращается в нуль при $x = 0$, эта точка рассматривается как особая для данных дифференциальных уравнений [6], а значения функции $y(x)$ в нуле исследуются специально для каждого из полученных решений уравнения Бесселя. Широко известны также самосопряженная форма записи уравнения (1)

$$\frac{d}{dx}\left(x \, \frac{dy}{dx}\right) + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0 \tag{3}$$

и уравнение с исключенной производной первого порядка

$$\frac{d^2}{dx^2} \, Y + \left[1 - \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)}{x^2}\right] Y = 0 \,, \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \, Y(x) \,, \tag{4}$$

которое получается из (1) указанной заменой функции $y(x)$ на $Y(x)$.

Уравнение Бесселя (1) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка в обыкновенных производных, общее решение которого есть линейная комбинация

$$y(x) = C_1 \, \mathcal{Z}_\nu^{(1)}(x) + C_2 \, \mathcal{Z}_\nu^{(2)}(x) \tag{5}$$

двух фундаментальных решений $\mathcal{Z}_\nu^{(1)}(x)$ и $\mathcal{Z}_\nu^{(2)}(x)$ с произвольными постоянными C_1 и C_2 [6]. Функции $\mathcal{Z}_\nu^{(1)}(x)$ и $\mathcal{Z}_\nu^{(2)}(x)$ относятся к классу *цилиндрических* функций, самыми известными среди которых являются функции Бесселя (Bessel), Вебера-Шлефли (Weber, Schläfli), Ханкеля (Hankel), Макдональда (MacDonald), Кельвина (Kelvin), Неймана (Neumann), Ангера (Anger), Бурже (Bourget), Джулиани (Giuliani), Струве (Struve), Ломмеля (Lommel) [1,2]. Параметр ν, появляющийся в уравнении Бесселя, наследуется в обозначениях и называется *индексом* цилиндрических функций. Если $\mathcal{Z}_\nu(x)$ удовлетворяет уравнению Бесселя, то $\mathcal{Z}_{-\nu}(x)$ также является его решением, поскольку исходные уравнения содержат ν^2. В силу того, что фундаментальные решения $\mathcal{Z}_\nu^{(1)}(x)$ и $\mathcal{Z}_\nu^{(2)}(x)$ по определению функционально независимы, детерминант Вронского (Wronski)

$$\mathcal{W}[\mathcal{Z}_\nu^{(1)}, \mathcal{Z}_\nu^{(2)}] \equiv \mathcal{Z}_\nu^{(1)}(x)\frac{d}{dx}\mathcal{Z}_\nu^{(2)}(x) - \mathcal{Z}_\nu^{(2)}(x)\frac{d}{dx}\mathcal{Z}_\nu^{(1)}(x) \tag{6}$$

отличен от нуля во всей области определения этих функций. Опираясь на известную из теории дифференциальных уравнений формулу Лиувилля [6], детерминант Вронского для цилиндрических функций можно представить в виде

$$\mathcal{W}(x) = \frac{\mathcal{C}_\nu}{x}\,, \tag{7}$$

где $\mathcal{C}_\nu$ - это константа, зависящая, вообще говоря, от индекса ν. Чтобы проверить этот результат, необходимо убедиться в том, что производная от детерминанта Вронского, домноженного на x, равна нулю:

$$\frac{d}{dx}[x\mathcal{W}] = \mathcal{W} + x\left[\mathcal{Z}_\nu^{(1)}\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{Z}_\nu^{(2)} - \mathcal{Z}_\nu^{(2)}\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{Z}_\nu^{(1)}\right] = 0\,. \tag{8}$$

Для этого достаточно выразить вторые производные от функций $\mathcal{Z}_\nu^{(1)}$ и $\mathcal{Z}_\nu^{(2)}$ через первые производные и сами функции с помощью уравнения (1).

1.2. Представление цилиндрических функций с помощью обобщенных степенных рядов

1.2.1. Функции Бесселя первого рода

Представим частное решение уравнения (1) в виде ряда

$$y(x) = x^\sigma \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\,. \tag{9}$$

Множитель x^σ с неизвестным пока значением параметра σ определяет поведение данного решения в окрестности особой точки $x = 0$. Разложение (9) удовлетворяет уравнению Бесселя, если для любого x из области определения справедливо соотношение

$$x^\sigma \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} x^m a_m \left[(\sigma + m)^2 - \nu^2 \right] + \sum_{m=0}^{\infty} x^{m+2} a_m \right\} = 0\,. \qquad (10)$$

В силу функциональной независимости степенных функций с различными показателями равенство (10) оказывается справедливым, если коэффициенты разложения a_m связаны рекуррентными соотношениями

$$a_0 \,\left[\sigma^2 - \nu^2 \right] = 0 \quad (m = 0)\,, \qquad (11)$$

$$a_1 \,\left[(\sigma + 1)^2 - \nu^2 \right] = 0 \quad (m = 1)\,, \qquad (12)$$

$$a_m \,\left[(\sigma + m)^2 - \nu^2 \right] + a_{m-2} = 0 \quad (m \geq 2)\,. \qquad (13)$$

Обратим внимание на тот факт, что при $\sigma = -\frac{1}{2}$ квадратные скобки в (11) и (12) совпадают, поэтому при исследовании однородных уравнений (11)-(13) естественно выделить следующие три случая.

(i) $a_0 \neq 0$, $\sigma \neq -\frac{1}{2}$.

В этом случае из (11) следует, что $\sigma = \pm\nu$, соотношение (12) принимает вид $a_1(2\sigma + 1) = 0$, откуда получаем, что $a_1 = 0$. Тогда в силу (13) все коэффициенты с нечетными номерами обращаются в нуль, $a_{2m+1} = 0$, и искомое разложение принимает вид

$$y(x) \to x^{\pm\nu} \left(a_0 + a_2 x^2 + ... + a_{2m} x^{2m} + ... \right)\,. \qquad (14)$$

(ii) $a_1 \neq 0$, $\sigma \neq -\frac{1}{2}$.

В этом случае из (12) следует, что $\sigma{=}-1 \pm \nu$, соотношение (11) принимает вид $a_0(2\sigma{+}1){=}0$ и, следовательно, $a_0 = 0$, $a_{2m} = 0$, и искомое разложение превращается в

$$y(x) \to x^{\pm\nu-1} \left(a_1 x + a_3 x^3 + ... + a_{2m+1} x^{2m+1} + ... \right)\,. \qquad (15)$$

Очевидно, это разложение отличается от (14) только формальной заменой коэффициентов $a_{2m} \leftarrow \cdot \rightarrow a_{2m+1}$. Иными словами, если $\sigma = \pm\nu \neq -\frac{1}{2}$, требования $a_0 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$ дают идентичный результат.

$(iii)\ \sigma = -\frac{1}{2}$.

В этом случае уравнения (11) и (12) приводятся к виду $a_0\left[\nu^2 - \frac{1}{4}\right] = 0$, $a_1\left[\nu^2 - \frac{1}{4}\right] = 0$. Если $a_0 \neq 0$ и $\nu = \pm 1/2$ или $a_1 \neq 0$ и $\nu = \pm 1/2$, то предыдущие логические рассуждения несправедливы. Анализ выделенного случая $\nu^2 = \frac{1}{4}$ удобно упростить, обратившись к уравнению (4). Очевидно, что общее решение уравнения Бесселя (1) выражается в этом случае через элементарные функции

$$y(x) = C_1\,\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2\,\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,, \tag{16}$$

подробный анализ этого случая мы проведём в разделе 2.1.3.

Вернемся к рекуррентным соотношениям (13), выберем для определенности положительное значение $\sigma{=}{+}\nu$ и будем считать равным нулю коэффициент a_1. Тогда все коэффициенты с четными номерами выражаются через a_0:

$$a_{2m}{=}(-1)\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(\nu{+}m)}{=}(-1)^2\frac{a_{2m-4}}{2^4 m(m{-}1)(\nu{+}m)(\nu{+}m{-}1)} = \ldots$$

$$= (-1)^m\,\frac{a_0}{2^{2m}\ m!\ (\nu{+}m)(\nu{+}m{-}1)\ldots(\nu{+}1)}\,. \tag{17}$$

Для того, чтобы обосновать выбор свободного параметра a_0, вспомним определение и некоторые свойства гамма-функции $\Gamma(\nu)$.

СПРАВКА О ГАММА ФУНКЦИЯХ

Гамма-функция Эйлера (Euler) определена несобственным интегралом

$$\Gamma(\nu) \equiv \int\limits_0^\infty dt\ e^{-t}\ t^{\nu-1}\,, \tag{18}$$

который сходится при $\nu > 0$ (здесь и ниже аргумент гамма-функции рассматривается как действительная величина). Из первого замечательного свойства этой функции [2,3]

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu) \tag{19}$$

следует, что при целом значении $\nu = m$ гамма-функция выражается через факториал

$$\Gamma(m+1) = m!\,. \tag{20}$$

При $m = 0$ получаем, в частности, что $\Gamma(1) = 1$. Прямым вычислением интеграла (18) находим также, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Второе замечательное свойство гамма-функции

$$\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)=\frac{\pi}{\sin \pi\nu} \tag{21}$$

позволяет, в частности, заметить, что $\Gamma(1)\Gamma(0)=\frac{\pi}{\sin\pi}$, или $\Gamma(0)=\infty$. Тогда из первого свойства следует, что

$$\Gamma(-m)=\frac{\Gamma(-m+1)}{-m}=...=(-1)^m\ \frac{\Gamma(0)}{m!}=\infty\,. \tag{22}$$

Учитывая перечисленные свойства гамма-функций, выберем a_0 в виде

$$a_0=\frac{1}{2^\nu\ \Gamma(\nu+1)} \tag{23}$$

и приведем коэффициенты a_{2m} в (17) к компактному виду

$$a_{2m}=(-1)^m\ \frac{1}{2^{2m+\nu}\ \Gamma(m+1)\ \Gamma(\nu+m+1)}\,. \tag{24}$$

В результате таких построений мы получили представление функции Бесселя первого рода индекса ν

$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}\,. \tag{25}$$

Формальная замена ν на $-\nu$ дает функцию Бесселя первого рода отрицательного индекса $-\nu$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\nu+m+1)}\,. \tag{26}$$

Функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ относятся к классу цилиндрических функций, поскольку согласно принципу их построения удовлетворяют уравнению Бесселя.

Функциональные ряды, представляющие функции Бесселя (25) и (26), абсолютно и равномерно сходятся на положительной части действительной оси. Чтобы доказать этот факт, используем признак Даламбера (D'Alembert) и вычислим предел модуля отношения величины последующего слагаемого в сумме (25) к величине предыдущего:

$$q(x)=\lim_{m\to\infty}\left|\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{m!\ \Gamma(\nu+m+1)}{(m+1)!\ \Gamma(\nu+m+2)}\right|=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^2\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(m+1)(\nu+m+1)}=0\,. \tag{27}$$

Этот предел равен нулю, то есть, он меньше единицы для любого ограниченного значения x, что и доказывает равномерную сходимость ряда.

Для того, чтобы ответить на вопрос: могут ли функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ быть выбраны в качестве фундаментальной системы решений уравнения Бесселя, необходимо проверить обращается ли в нуль определитель Вронского. Эта задача согласно соотношению (7) сводится к вычислению константы $\mathcal{C}_\nu$ по следующему известному рецепту:

$$\mathcal{C}_\nu = x\mathcal{W} = \lim_{x\to 0}\left\{x\left[J_\nu \frac{d}{dx}J_{-\nu} - J_{-\nu}\frac{d}{dx}J_\nu\right]\right\}. \tag{28}$$

Поскольку при малых значениях аргумента достаточно ограничиться первыми слагаемыми в разложениях (25) и (26)

$$J_\nu(x\to 0) \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}, \quad J_{-\nu}(x\to 0) \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}, \tag{29}$$

данная константа легко находится прямым вычислением

$$\mathcal{C}_\nu = -\frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu\,. \tag{30}$$

Таким образом, определитель Вронского $\mathcal{W}[J_\nu, J_{-\nu}]$ обращается в нуль, если $\sin\pi\nu = 0$, то есть, индекс функции Бесселя является целым числом $\nu = n$. Установить этот факт можно и иначе. Рассмотрим функцию Бесселя целого отрицательного индекса $J_{-n}(x)$. В силу свойства (22) гамма-функции с отрицательным аргументом принимают бесконечно большие значения, обращая в нуль соответствующие слагаемые в разложении (26). Это означает, что суммирование в данном ряде реально начинается со значения $m = n$:

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty}(-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-n+m+1)}. \tag{31}$$

Вводя новый индекс суммирования $l = m - n$, перепишем данную формулу в виде

$$J_{-n}(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+n}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}}{\Gamma(l+1)\Gamma(n+l+1)}, \tag{32}$$

откуда непосредственно следует линейное соотношение

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)\,. \tag{33}$$

Функции Бесселя $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ целого индекса линейно зависимы.

1.2.2. Функции Бесселя второго рода - функции Вебера-Шлефли

Функции Бесселя целого индекса J_n и J_{-n} линейно зависимы и потому не образуют фундаментальной системы решений уравнения Бесселя с $\nu^2 = n^2$. Для того, чтобы обойти эту проблему, были введены так называемые функции Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$ как линейные комбинации следующего вида

$$Y_\nu(x) \equiv \frac{\cos\pi\nu J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}\,. \tag{34}$$

Очевидно, что в силу линейности уравнения Бесселя функция $Y_\nu(x)$, как линейная комбинация решений, также является его решением. Эти функции принято называть именами Вебера и Шлефли. Термин функции Неймана, введенный для этих функций, например, в учебнике [4], по-видимому, недостаточно обоснован с исторической точки зрения [1,5]. Детерминант Вронского, подсчитанный для пары функций $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$:

$$\mathcal{W}\left[J_\nu(x), Y_\nu(x)\right] = -\frac{1}{\sin\pi\nu}\mathcal{W}\left[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)\right] = \frac{2}{\pi x}\,, \tag{35}$$

не обращается в нуль ни при каких значениях индексов. Поэтому общее решение уравнения Бесселя (1) для любого значения индекса ν стандартно представляется в виде

$$y(x) = C_1\ J_\nu(x) + C_2\ Y_\nu(x)\,. \tag{36}$$

Для того, чтобы явно представить разложение функций $Y_n(x)$, обычно пользуются пределом $Y_n = \lim\limits_{\nu\to n} Y_\nu$. В этом пределе $\cos\pi\nu \to (-1)^n$, $\sin\pi\nu \to 0$, следовательно, с учетом соотношения (33) получаем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Воспользовавшись правилом Лопиталя (L'Hospital)

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\left[-\pi\tan\pi\nu\ J_\nu(x) + \frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x) - \frac{1}{\cos\pi\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right]\,, \tag{37}$$

искомую функцию приводят к следующему стандартному виду

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\ \log\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}\frac{(n-m-1)!}{m!} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!}\left[\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} + \frac{\Gamma'(n+m+1)}{\Gamma(n+m+1)}\right]\,. \tag{38}$$

Здесь и далее штрих символизирует производную от указанной функции по её аргументу. Вывод этой формулы не входит в обязательную часть нашей программы, однако (38) иллюстрирует важное свойство функций $Y_n(x)$: все они неограниченно возрастают при $x \to 0$. Уместно напомнить, что для функций Бесселя первого рода выполняются соотношения: $J_0(0) = 1$ (при $n = 0$) и $J_n(0) = 0$, $J_{-n}(0) = \infty$, если $n \geq 1$. Для функций Бесселя второго рода $Y_n(0) = \infty$ при $n \geq 1$ из-за второго слагаемого в (38), а $Y_0(0) = -\infty$ из-за наличия логарифма в первом слагаемом этой формулы.

1.2.3. Функции Бесселя третьего рода - функции Ханкеля

Функции Бесселя третьего рода, определенные следующим образом:

$$H_\nu^{(1)}(x) \equiv J_\nu + iY_\nu(x) = \frac{i}{\sin \pi\nu} \left[J_\nu(x) e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right], \tag{39}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \equiv J_\nu - iY_\nu(x) = \frac{i}{\sin \pi\nu} \left[J_{-\nu}(x) - J_\nu(x) e^{i\pi\nu}\right], \tag{40}$$

оказались весьма полезными при аналитическом продолжении функций Бесселя в комплексную область $x \to z = x + iy$. В данном курсе лекций функции Ханкеля приводятся исключительно в справочных целях. Подчеркнем только одно замечательное свойство этих функций:

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(x), \quad H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(x), \tag{41}$$

указывающее на симметрию относительно замены индекса ν на $-\nu$.

1.2.4. Функции Бесселя мнимого аргумента

Модифицированное уравнение Бесселя (2) можно формально получить из уравнения Бесселя (1) заменой x на ix, следовательно, функция Бесселя $J_\nu(ix)$ является решением уравнения (2). Однако, для того, чтобы представить общее решение уравнения (2) с помощью *действительных* функций

$$y(x) = C_1\ I_\nu(x) + C_2\ K_\nu(x), \tag{42}$$

были введены функции Бесселя мнимого аргумента $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ по следующим правилам:

$$I_\nu(x) \equiv i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}, \tag{43}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\left[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right]. \tag{44}$$

Функции $K_\nu(x)$ более известны как функции Макдональда; они нашли широкое применение в статистической теории релятивистских систем. Функции Макдональда являются четными функциями индекса ν, поскольку имеет место замечательное соотношение $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$. Функции $I_\nu(x)$ обладают подобной симметрией: $I_n(x) = I_{-n}(x)$, но только при целом значении индекса $\nu = n$.

1.3. Замечание о дифференциальных уравнениях, сводящихся к уравнениям Бесселя

В финале первой лекции следует упомянуть о трех типах дифференциальных уравнений, которые сводятся к уравнению Бесселя заменой аргумента, заменой функции или комбинацией этих двух замен.

1.3.1. Дифференциальное уравнение

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0\,, \tag{45}$$

отличающееся от (1) только множителем λ^2 перед x^2, имеет общее решение вида

$$y(x) = C_1\ J_\nu(\lambda x) + C_2\ Y_\nu(\lambda x)\,. \tag{46}$$

1.3.2. Дифференциальное уравнение

$$x^2y'' + axy' + (x^2 - \nu^2)y = 0\,, \tag{47}$$

отличающееся от (1) только множителем a перед производной первого порядка, заменой

$$y(x) = x^{\frac{1-a}{2}}Z(x) \tag{48}$$

сводится к уравнению Бесселя

$$x^2Z'' + xZ' + (x^2 - \mu^2)y = 0 \tag{49}$$

с параметром

$$\mu^2 \equiv \nu^2 + \frac{1}{4}(a-1)^2\,. \tag{50}$$

Общее решение уравнения (47) представляется в виде

$$y(x) = x^{\frac{1-a}{2}}\left[C_1\ J_\mu(x) + C_2\ Y_\mu(x)\right]. \tag{51}$$

1.3.3 Дифференциальное уравнение

$$x^2 y'' + axy' + (\lambda^2 x^{2k} + c)y = 0\,, \quad k \neq 0\,, \quad \lambda \neq 0\,, \tag{52}$$

очевидно, имеет общее решение

$$y(x) = x^{\frac{1-a}{2}} \left[C_1 \; J_\mu \left(\frac{\lambda}{k} x^k \right) + C_2 \; Y_\mu \left(\frac{\lambda}{k} x^k \right) \right] \,, \tag{53}$$

где параметр μ определен равенством

$$\mu \equiv \frac{1}{2k} \sqrt{(1-a)^2 - 4c} \;\; . \tag{54}$$

О других уравнениях, сводящихся к уравнению Бесселя, можно прочитать в фундаментальном справочнике [6]. Для тех, кто интересуется представлением функций Бесселя в терминах решений гипергеометрического уравнения, рекомендую изучить монографию [7].

ЛЕКЦИЯ II.
Интегральные представления функций Бесселя, рекуррентные соотношения и производящая функция

2.1. Представление функций Бесселя с помощью рекуррентных соотношений

2.1.1. Вывод рекуррентных соотношений

Три функции Бесселя одного и того же аргумента с индексами, отличающимися на единицу, $J_{\nu-1}(x)$, $J_\nu(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$, связаны линейным соотношением, которое принято называть рекуррентным. Для того, чтобы получить это рекуррентное соотношение, проделаем следующую цепочку операций. Во-первых, найдем производную от произведения $x^\nu J_\nu(x)$ и преобразуем её с помощью первого свойства гамма-функции:

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = \frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2\nu} 2^\nu}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2\nu-1}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m)} = x^\nu J_{\nu-1}(x)\,. \tag{55}$$

Если проделать аналогичную операцию с произведением $x^{-\nu}J_\nu(x)$, то полученная формула и формула (55) дают следующую пару дифференциальных соотношений:

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x)\,, \quad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,. \tag{56}$$

Выполнив дифференцирование и разделив первое и второе равенства, соответственно, на x^ν и $x^{-\nu}$, выразим производную от функции Бесселя

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x)\,, \quad J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x)\,. \tag{57}$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим два соотношения

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\,, \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x)\,. \tag{58}$$

Первое из них позволяет выразить производную от функции Бесселя индекса ν через функции индексов $\nu+1$ и $\nu-1$. Второе из равенств (58) представляет собой искомое рекуррентное соотношение.

Из дифференциальных соотношений для функций Бесселя (56) вытекают два важных следствия. Во-первых, разделим соотношения (56) на x, продифференцируем их еще раз, затем повторим указанную операцию нужное число раз. Тогда очевидными становятся дифференциальные соотношения k-го порядка

$$\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-k} J_{\nu-k}(x)\,,$$

$$\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k \left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = (-1)^k x^{-\nu-k} J_{\nu+k}(x)\,. \tag{59}$$

Во-вторых, интегрируя соотношения для функций Бесселя (56), получим известные неопределенные интегралы

$$\int dx\ x^\nu J_{\nu-1}(x) = x^\nu J_\nu(x)\,, \quad \int dx\ x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) = -x^{-\nu} J_\nu(x)\,. \tag{60}$$

Функции Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$ подчиняются тем же базовым дифференциальным соотношениям (56), что и функции $J_\nu(x)$. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно взять определение (34), воспользоваться формулами (56) с учетом того, что $\sin\pi\nu = -\sin\pi(\nu-1)$ и $\cos\pi\nu = -\cos\pi(\nu-1)$. Это означает, что все остальные соотношения (57)-(60) также не меняют своего вида при замене J_ν на Y_ν.

Рекуррентные соотношения для $I_\nu(x)$, - функций Бесселя мнимого аргумента, получаются аналогично, но теперь они основываются на дифференцировании формулы (43). Легко убедиться, что появляющиеся отличия связаны с изменением знака во втором равенстве (56):

$$\frac{d}{dx}[x^\nu I_\nu(x)] = x^\nu I_{\nu-1}(x)\,, \quad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} I_\nu(x)\right] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x)\,,$$

$$2I'_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)\,, \quad I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x)\,,$$

$$\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k [x^\nu I_\nu(x)] = x^{\nu-k} I_{\nu-k}(x)\,,$$

$$\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k \left[x^{-\nu} I_\nu(x)\right] = x^{-\nu-k} I_{\nu+k}(x)\,,$$

$$\int dx\ x^\nu I_{\nu-1}(x) = x^\nu I_\nu(x)\,, \quad \int dx\ x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) = x^{-\nu} I_\nu(x)\,. \tag{61}$$

Из (61) с учетом определения (44) и равенства $\sin\pi\nu{=}{-}\sin\pi(\nu{-}1)$ получаем аналогичные соотношения для функций Макдональда $K_\nu(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu K_\nu(x)\right] = -x^\nu K_{\nu-1}(x)\,, \quad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} K_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x)\,, \qquad (62)$$

$$-2K'_\nu(x) = K_{\nu-1}(x){+}K_{\nu+1}(x)\,, \quad K_{\nu+1}(x){-}K_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}K_\nu(x)\,, \qquad (63)$$

$$\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k \left[x^\nu K_\nu(x)\right] = (-1)^k x^{\nu-k} K_{\nu-k}(x)\,, \qquad (64)$$

$$\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k \left[x^{-\nu} K_\nu(x)\right] = (-1)^k x^{-\nu-k} K_{\nu+k}(x)\,, \qquad (65)$$

$$\int dx\; x^\nu K_{\nu-1}(x) = -x^\nu K_\nu(x)\,, \quad \int dx\; x^{-\nu} K_{\nu+1}(x) = -x^{-\nu} K_\nu(x)\,. \qquad (66)$$

Формулы (61)-(66) рекомендуется проверить самостоятельно.

2.1.2. Приложение рекуррентных соотношений к функциям Бесселя целого индекса ($\nu = n$)

Используя рекуррентные соотношения, полученные в предыдущем разделе, любую функцию $J_n(x)$ целого индекса можно выразить через $J_{n-1}(x)$ и $J_{n-2}(x)$. В свою очередь $J_{n-1}(x)$ выражается через $J_{n-2}(x)$ и $J_{n-3}(x)$ и так далее. В результате функция Бесселя $J_n(x)$ может быть представлена как линейная комбинация двух функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$:

$$J_n(x) = \mathcal{P}_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right) J_0(x) + \mathcal{Q}_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) J_1(x)\,, \qquad (67)$$

в которой символами $\mathcal{P}_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\mathcal{Q}_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ обозначены полиномы соответствующей степени от обратной величины аргумента. Структура этих полиномов становится понятной, если привести несколько примеров для малых значений n:

$$J_2(x) = -J_0(x) + \frac{2}{x}J_1(x)\,,$$

$$J_3(x) = -\frac{4}{x}J_0(x) + \left(-1 + \frac{8}{x^2}\right) J_1(x)\,, ... \qquad (68)$$

Если мы имеем дело с функцией Бесселя отрицательного индекса J_{-n}, то помощью соотношения (33) она может быть сведена к J_n, а затем представлена разложением (67). Наконец, отметим, что второе из соотношений (57) при $\nu = 0$ дает важное следствие:

$$J_1(x) = -J_0'(x)\,. \tag{69}$$

Это означает, что *все* функции Бесселя целого индекса могут быть представлены соотношением типа (67) с помощью единственной функции нулевого индекса

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2} \tag{70}$$

и её производной первого порядка.

2.1.3. Функции Бесселя полуцелого индекса ($\nu{=}n{+}\frac{1}{2}$)

Согласно рекуррентному соотношению (58) все функции Бесселя полуцелого индекса $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ могут быть представлены как линейные комбинации двух функций $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, в частности,

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)\,,$$
$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)J_{\frac{1}{2}}(x) - \frac{3}{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)\,, \ldots \tag{71}$$

С другой стороны, принимая во внимание решение (16), согласно которому функции Бесселя $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ могут быть выражены через элементарные функции, получим, что все $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ выражаются через элементарные функции. Именно это замечательное свойство выделяет функции Бесселя полуцелого индекса среди остальных функций этого вида и предоставляет явную возможность проиллюстрировать на их примере все основные свойства функций Бесселя.

Функция $J_{\frac{1}{2}}(x)$ представляется рядом

$$J_{\frac{1}{2}}(x) {=} \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(m{+}1)\Gamma\left(\frac{3}{2}{+}m\right)}\,. \tag{72}$$

Для того, чтобы обнаружить в нём разложение знакомой элементарной функции, вычислим отдельно величину

$$2^{2m+1}\Gamma(m{+}1)\;\Gamma\left(\frac{3}{2}{+}m\right)\,. \tag{73}$$

Раскрыв гамма-функции с помощью соотношений (19), (20)

$$2^{2m+1}\left[1\cdot 2\cdots(m-1)\cdot m\right]\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] \tag{74}$$

и реорганизовав произведение с помощью множителя 2^{2m+1} к виду

$$2\cdot 4\cdots 2(m-1)\cdot 2m\cdot(2m+1)\cdot(2m-1)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}(2m+1)!\,, \tag{75}$$

получаем, что преобразованный ряд сводится к функции $\sin x$, а сама функция Бесселя принимает вид

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\;\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,. \tag{76}$$

Аналогичная процедура приводит к формуле для $J_{-\frac{1}{2}}(x)$:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\;\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,. \tag{77}$$

Функции Вебера-Шлефли (34) при $\nu=\frac{1}{2}$ сводятся к найденным функциям:

$$Y_{\frac{1}{2}}(x)=-J_{-\frac{1}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,,\quad Y_{-\frac{1}{2}}(x)=J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,, \tag{78}$$

а соответствующие функции Ханкеля (39), (40) принимают вид

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(x)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\;e^{ix}\,,\quad H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(x)=i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\;e^{-ix}\,,$$

$$H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\;e^{ix}\,,\quad H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\;e^{-ix}\,. \tag{79}$$

Повторяя указанные вычисления для функций Бесселя мнимого аргумента, обнаруживаем, что для получения $I_{\frac{1}{2}}(x)$ и $I_{-\frac{1}{2}}(x)$ достаточно заменить тригонометрические функции на гиперболические в формулах (76), (77):

$$I_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sinh x\,,\quad I_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x\,. \tag{80}$$

Наконец, согласно определению (44) получим функции Макдональда:

$$K_{\frac{1}{2}}=K_{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\;e^{-x}\,. \tag{81}$$

Второе дифференциальное соотношение в (59) при $\nu{=}\frac{1}{2}$ позволяют явно представить функции Бесселя первого рода полуцелого индекса с помощью n-кратной производной от элементарной функции

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; x^{n+\frac{1}{2}} \left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right) . \tag{82}$$

Для аналогичного представления функции $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$ следует $\sin x$ заменить на $\sinh x$ и исключить множитель $(-1)^n$. Формула

$$K_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; x^{n+\frac{1}{2}} \left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \tag{83}$$

позволяет представить функции Макдональда полуцелого индекса.

(i) Поведение функций Бесселя индекса $\pm\frac{1}{2}$ в нуле

При $x = 0$ в нуль обращаются три из перечисленных функции Бесселя:

$$J_{\frac{1}{2}}(0) = 0\,, \quad Y_{-\frac{1}{2}}(0) = 0\,, \quad I_{\frac{1}{2}}(0) = 0\,, \tag{84}$$

остальные принимают неограниченные значения.

(ii) Асимптотическое поведение функций Бесселя индекса $\pm\frac{1}{2}$

При $x \to \infty$ только две функции $I_{\frac{1}{2}}(x)$ и $I_{-\frac{1}{2}}(x)$ неограниченно возрастают, остальные асимптотически стремятся к нулю. Поскольку для функций Бесселя полуцелого индекса справедливо соотношение, аналогичное (67), то при $x \to \infty$ в нуль асимптотически обращаются функции Бесселя первого, второго, третьего рода и функции Макдональда с произвольным полуцелым индексом $n{+}\frac{1}{2}$.

(iii) О корнях функций Бесселя индекса $\pm\frac{1}{2}$

Функции Бесселя третьего рода $H^{(1)}_{\pm\frac{1}{2}}(x)$, $H^{(2)}_{\pm\frac{1}{2}}(x)$ и функции мнимого аргумента $I_{\pm\frac{1}{2}}(x)$, $K_{\pm\frac{1}{2}}(x)$ не обращаются в нуль на положительной части действительной оси $x > 0$. В этой области корни имеются только у функций Бесселя первого и второго рода:

$$J_{\frac{1}{2}}(\pi k){=}0\,, \quad Y_{-\frac{1}{2}}(\pi k){=}0\,, \quad J_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}{+}\pi k\right){=}0\,, \quad Y_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}{+}\pi k\right){=}0\,. \tag{85}$$

Таким образом, на интервале $x > 0$ функции Бесселя $J_{\pm\frac{1}{2}}(x)$ и $Y_{\pm\frac{1}{2}}(x)$ являются квазипериодическими с бесконечным числом эквидистантно распределенных нулей и бесконечным числом экстремумов. В частности, максимумы функций Бесселя первого рода как функции порядкового номера корня k описываются формулами

$$J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=\frac{2}{\pi\sqrt{4k+1}}\,, \quad J_{-\frac{1}{2}}(2\pi k)=\frac{1}{\pi\sqrt{k}}\,, \tag{86}$$

откуда следует, что высота этих максимумов уменьшается с увеличением порядкового номера экстремума.

2.2. Представление функций Бесселя целого индекса с помощью производящей функции

Функция $\Re(x,t)$ называется производящей функцией для функций Бесселя первого рода целого индекса n, если $J_n(x)$ являются коэффициентами разложения функции $\Re(x,t)$ по степеням t:

$$\Re(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\ t^n = J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\left[t^n+(-1)^n t^{-n}\right]\,. \tag{87}$$

Найти производящую функцию в явном виде помогают следующие рассуждения. Подставим разложение (25) в формулу (87)

$$\Re(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}t^n}{m!(m+n)!} \tag{88}$$

и сделаем замену индекса суммирования $k{=}m{+}n$. Тогда двойная сумма в (88) представляется произведением двух сумм, каждая из которых задает экспоненту:

$$\Re(x,t)=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^k}{k!}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2t}\right)^m}{m!}\right]=e^{\frac{xt}{2}}\cdot e^{-\frac{x}{2t}}\,. \tag{89}$$

В результате получаем хорошо известную производящую функцию для функций Бесселя первого рода

$$\Re(x,t)=\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]\,. \tag{90}$$

Как частный случай при $t=e^{i\varphi}$ из (87) и (90) получается формула разложения

$$e^{ix\sin\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\ e^{in\varphi}\,, \tag{91}$$

которая широко используется в физических приложениях, например, в теории магнитоактивной плазмы.

2.3. Интегральные представления функций Бесселя

2.3.1. Интегральное представление, введенное Бесселем для функций целого индекса $\nu{=}n$

Формула Коши, полученная в курсе теории функций комплексной переменной, позволяет найти коэффициенты разложения (87) в виде контурного интеграла

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{dt}{t^{n+1}}\ \Re(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{dt}{t^{n+1}} \exp\left[\frac{x}{2}\left(t{-}\frac{1}{t}\right)\right], \tag{92}$$

где замкнутый жорданов контур $\mathcal{C}$ охватывает точку $t=0$ на комплексной плоскости t. Для функций Бесселя целого индекса этот контур может быть выбран в виде окружности единичного радиуса (детали доказательства можно найти, например, в [1]). Полагая в этом случае

$$t = e^{i\theta}, \quad |t| = 1, \quad \frac{dt}{it} = d\theta, \tag{93}$$

получаем первое интегральное представление

$$J_n(x){=}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \exp\{i\,[x\sin\theta{-}n\theta]\}. \tag{94}$$

В силу симметричности пределов интегрирования мнимая часть данного интеграла обращается в нуль, и мы получаем интегральную формулу Бесселя (Bessel, 1824)

$$J_n(x){=}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} d\theta \cos\left(x\sin\theta{-}n\theta\right). \tag{95}$$

Для нецелых значений ν интеграл

$$\mathcal{J}_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} d\theta \cos\left(x\sin\theta{-}\nu\theta\right) \tag{96}$$

задает функцию Ангера-Вебера, которая в общем случае не совпадает с функцией Бесселя $J_\nu(x)$, и для описания последней необходимо пользоваться интегральным представлением Пуассона (Poisson, 1823).

2.3.2. Представление функций Бесселя произвольного индекса ν с помощью интеграла Пуассона

Для того, чтобы получить интегральную формулу Пуассона для функций Бесселя первого рода произвольного индекса, рассмотрим интеграл следующего вида

$$F_\nu(x) \equiv \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \ \cos(x \sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu} \,. \tag{97}$$

Раскладывая $\cos(x\sin\varphi)$ в степенной ряд, представим функцию $F_\nu(x)$ в виде суммы

$$F_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} F_\nu^{(n)} \,, \tag{98}$$

где вспомогательный интеграл

$$F_\nu^{(n)} \equiv \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi(\sin\varphi)^{2n}(\cos\varphi)^{2\nu} \tag{99}$$

зависит только от номера n и индекса ν. Заменой переменной интегрирования $z = \sin^2\varphi$ интеграл (99) сводится к бета-функции и выражается через гамма-функции Эйлера:

$$F_\nu^{(n)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dz \ z^{n-\frac{1}{2}}(1-z)^{\nu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\mathcal{B}\left(n+\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2\Gamma(n+\nu+1)} \,. \tag{100}$$

Вспоминая упражнение с гамма-функцией полуцелого аргумента, выполненное в разделе 2.1.3. (формулы (73)-(75)), приведем отношение гамма-функций с удвоенным аргументом к следующему удобному виду

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2n+1\right)} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n)!} = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2n)!} =$$

$$= \left[\frac{(2n-1)\cdots 3\cdot 1}{2^n(2n)!}\right]\cdot\left[\frac{2n\cdot 2(n-1)\cdots 2\cdot 1}{2^n n!}\right]\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}\ n!} \,. \tag{101}$$

Тогда функция $F_\nu(x)$ может быть записана как

$$F_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)}\right] \,, \tag{102}$$

а сумма, выделенная квадратными скобками, есть ничто иное, как разложение в ряд функции Бесселя первого рода индекса ν. Сравнивая (102) и (97) получаем представление функции $J_\nu(x)$ с помощью интеграла Пуассона:

$$J_\nu(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \cos(x\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu}\,. \tag{103}$$

Заменой $t = \sin\varphi$ оно сводится к другому известному интегралу

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^{1} dt\ \cos(xt)(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,, \tag{104}$$

который легко обобщается на случай функций Бесселя мнимого аргумента.

2.3.3. Интегральные представления модифицированных функций Бесселя

Для справки уместно также привести интегральное представление типа Пуассона для модифицированных функций Бесселя (Schläfli, 1868)

$$I_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^{1} dt\ e^{-xt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,. \tag{105}$$

Формула (105) может быть получена из (104) следующим образом: в силу симметричности пределов интегрирования (104) не изменится, если заменить $\cos(xt)$ под знаком интеграла на $\cos(xt)+i\sin(xt) = e^{ixt}$, следовательно, замена x на ix непосредственно приводит к (105). Представление модифицированных функций Бесселя с помощью контурного интеграла [1] вовлекает в рассмотрение несобственные интегралы по бесконечному интервалу

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} d\theta\ e^{x\cos\theta}\cos\nu\theta - \frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int\limits_0^{\infty} d\xi e^{-x\cosh\xi-\nu\xi}\,. \tag{106}$$

Важно отметить, что при целом $\nu = n$ вторая часть этого интеграла исчезает, поскольку $\sin\pi n = 0$. Используя (106) в определении (44), моментально получаем первое интегральное представление для функции Макдональда

$$K_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\infty} d\xi e^{-x\cosh\xi}\ (\sinh\xi)^{2\nu}\,. \tag{107}$$

Однако, наиболее известным интегральным представлением для этой функции является формула (Schläfli, 1873)

$$K_\nu(x) = \int\limits_0^\infty d\xi e^{-x\cosh\xi}\cosh\nu\xi\,, \tag{108}$$

которая нашла широкое применение в релятивистской статистике.

2.4. Об асимптотическом поведении функций Бесселя при больших значениях аргумента

Для того, чтобы получить главную часть разложения функции Бесселя произвольного индекса при больших значениях аргумента, следует обратить внимание на то, что при $x \to \infty$ уравнение (4) превращается в

$$Y''(x) + Y = 0 \tag{109}$$

независимо от значения индекса ν. Индекс ν появляется только при конкретизации констант интегрирования:

$$Y(x) \to C_{1\nu}\cos x + C_{2\nu}\sin x \quad \Rightarrow \quad y(x) \to \frac{A_\nu}{\sqrt{x}}\cos\left(x + \psi_\nu\right). \tag{110}$$

Для полуцелого индекса константы A_ν и ψ_ν в (110) могут быть непосредственно вычислены. Действительно, следуя методу математической индукции, легко установить, что при $x \to \infty$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) \to -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,, \quad J_{\frac{5}{2}}(x) \to -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,, \ldots$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi n\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x - \frac{1}{2}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right]. \tag{111}$$

Заменив $n+\frac{1}{2}$ на произвольное ν, получим известные асимптотические разложения функций Бесселя первого, второго и третьего рода

$$J_\nu(x \to \infty) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Y_\nu(x \to \infty) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$H_\nu^{(1)}(x \to \infty) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ e^{i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$H_\nu^{(2)}(x \to \infty) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\,. \tag{112}$$

Если мы имеем дело с функциями Бесселя мнимого аргумента при $x \to \infty$, то из уравнения (4) следует, что

$$Y''(x) - Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(x) = C_{1\nu} \cosh x + C_{2\nu} \sinh x\,. \tag{113}$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения, получим широко известное асимптотическое разложение функции Макдональда

$$K_\nu(x \to \infty) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\,, \tag{114}$$

откуда следует, что главная часть этой функции не зависит от ν и совпадает с точным значением для $K_{\pm\frac{1}{2}}(x)$ из формулы (81).

2.5. О корнях функций Бесселя

Теория корней функций Бесселя первого, второго и третьего рода детально разработана и изложена, например, в книгах [1,2], однако обсуждение её деталей выходит за рамки курса. Мы ограничимся только одним утверждением:

Функции Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ действительного индекса ν имеют бесчисленное множество нулей, расположенных на действительной оси симметрично относительно точки $x = 0$.

Если индекс ν есть целое число, то все нули - простые за исключением значения $x = 0$, которое при $\nu = n = 1, 2, ...$ является нулем соответствующей кратности n.

Указанные свойства нулей функций Бесселя первого рода легко иллюстрируются на примере функций полуцелого индекса (следует обратить внимание на формулы (85)).

ЛЕКЦИЯ III.
Ряды Фурье-Бесселя и их приложения

3.1. Ортогональность функций Бесселя

Как следует из формулы (45), функция Бесселя $J_\nu(kx)$ с аргументом kx есть решение уравнения

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(kx)+x\frac{d}{dx}J_\nu(kx)+(k^2x^2-\nu^2)J_\nu(kx)=0\,. \tag{115}$$

Перепишем (115) в самосопряженном виде (3) для $k=k_1$ и $k=k_2$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_\nu(k_1x)\right]+\left(k_1^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_1x)=0\,,$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_\nu(k_2x)\right]+\left(k_2^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_2x)=0\,, \tag{116}$$

умножим первое из полученных уравнений на $J_\nu(k_2x)$, второе на $J_\nu(k_1x)$ и найдем их разность. Полученное уравнение приведем к виду

$$\begin{gathered}(k_2^2-k_1^2)xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)=\\ =\frac{d}{dx}\left\{x\left[J_\nu(k_2x)\frac{d}{dx}J_\nu(k_1x)-J_\nu(k_1x)\frac{d}{dx}J_\nu(k_2x)\right]\right\}\end{gathered} \tag{117}$$

и выполним интегрирование по x в интервале $(0,l)$. При вычислении интеграла от полной производной в правой части (117) потребуем, чтобы выражение в фигурных скобках обратилось в нуль на нижнем пределе $x=0$. Учитывая тот факт, что разложение в ряд функции Бесселя индекса ν (25) начинается со степенного множителя x^ν, легко убедиться, что равенство нулю выполнимо при $\nu>-1$. В результате приходим к следующему интегральному соотношению

$$\begin{gathered}(k_2^2-k_1^2)\int\limits_0^l xdxJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)=\\ =l\left[k_1J_\nu(k_2l)J_\nu'(k_1l)-k_2J_\nu(k_1l)J_\nu'(k_2l)\right]\,,\end{gathered} \tag{118}$$

в котором штрих обозначает производную по всему аргументу, указанному в скобках. Поскольку функции Бесселя первого рода имеют бесконечное число вещественных корней в интервале $x>0$, предположим, что $J_\nu(k_1l)=0$ и

$J_\nu(k_2 l) = 0$. Иными словами, пусть параметр k_1 связан с i-ым по счету корнем $\mu_i^{(\nu)}$ функции Бесселя индекса ν соотношением $k_1 = \frac{\mu_i^{(\nu)}}{l}$, а параметр k_2 - с j-ым корнем по правилу $k_2 = \frac{\mu_j^{(\nu)}}{l}$. Тогда правая часть равенства (118) обращается в нуль. Если при этом $k_1^2 \neq k_2^2$, что для некратных положительных корней означает $i \neq j$, то получаем знаменитое интегральное соотношение

$$\int\limits_0^l x dx J_\nu \left(\frac{\mu_i^{(\nu)} x}{l} \right) J_\nu \left(\frac{\mu_j^{(\nu)} x}{l} \right) = 0\,, \tag{119}$$

которое по устоявшейся терминологии означает, что функции Бесселя одного и того же индекса ортогональны на интервале $(0, l)$ с весовой функцией x, если $\mu_i^{(\nu)}$ и $\mu_j^{(\nu)}$ представляют собой несовпадающие корни функции $J_\nu(x)$.

Если параметры k_1 и k_2 совпадают, мы получаем так называемое соотношение нормировки для функций Бесселя. Чтобы получить это соотношение, положим $k_1 = k$, и пусть $k_2 \to k$. В этом случае из (118) следует равенство

$$\int\limits_0^l x dx J_\nu^2(kx) = \lim_{k_2 \to k} \left[\frac{lk}{(k_2^2 - k^2)}\ J_\nu'(kl) J_\nu(k_2 l) \right]\,, \tag{120}$$

которое раскрывается по правилу Лопиталя дифференцированием по k_2. Эта операция приводит к равенству

$$\int\limits_0^l x dx J_\nu^2(kx) = \frac{l^2}{2} \left[J_\nu'(kl) \right]^2\,. \tag{121}$$

Если kl есть отличный от нуля корень функции Бесселя, то второе из соотношений (57) превращается в равенство $J_\nu'(kl) = -J_{\nu+1}(kl)$. С учетом этого обстоятельства соотношение ортогональности - нормировки принимает окончательный вид

$$\int\limits_0^l x dx J_\nu \left(\frac{\mu_i^{(\nu)} x}{l} \right) J_\nu \left(\frac{\mu_j^{(\nu)} x}{l} \right) = \frac{l^2}{2}\ \delta_{ij}\ J_{\nu+1}^2 \left(\mu_i^{(\nu)} \right)\,. \tag{122}$$

Напомним, что оно справедливо для функций Бесселя индекса $\nu > -1$.

3.2. Ряды Фурье-Бесселя

В предыдущем параграфе мы установили, что система функций

$$\left\{ J_\nu \left(\frac{\mu_1^{(\nu)} x}{l} \right), J_\nu \left(\frac{\mu_2^{(\nu)} x}{l} \right), \ldots, J_\nu \left(\frac{\mu_i^{(\nu)} x}{l} \right), \ldots \right\} \tag{123}$$

ортогональна на интервале $(0, l)$ с весом x, если $\nu > -1$, а $\mu_1^{(\nu)}, ...\mu_i^{(\nu)}$ - это положительные корни функции Бесселя $J_\nu(x)$, занумерованные в порядке их возрастания. Функцию $f(x)$, определенную на интервале $(0, l)$, можно разложить в ряд Фурье-Бесселя

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \; J_\nu \left(\frac{\mu_i^{(\nu)} x}{l} \right) . \tag{124}$$

Коэффициенты разложения a_i находятся по стандартной схеме: левую и правую часть (124) следует домножить на $xJ_\nu \left(\frac{\mu_j^{(\nu)} x}{l} \right)$, проинтегрировать в пределах от нуля до l и воспользоваться условиями ортогональности-нормировки (122). В результате получим коэффициенты Фурье-Бесселя

$$a_i = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i^{(\nu)})} \int_0^l x dx f(x) J_\nu \left(\frac{\mu_i^{(\nu)} x}{l} \right) . \tag{125}$$

Обсуждение вопросов сходимости ряда Фурье - Бесселя выходит за рамки курса, мы ограничимся только одной наиболее часто используемой формулировкой условий, гарантирующих такую сходимость [1]:
Если функция $f(x)$ определена и непрерывна внутри интервала $(0, l)$, а интеграл $\int_0^l \sqrt{x} dx f(x)$ существует и абсолютно сходится, то при $\nu \geq -\frac{1}{2}$ ряд Фурье-Бесселя (124) с коэффициентами (125) равномерно сходится внутри интервала $(0, l)$.

3.3. О некоторых приложениях функций Бесселя

3.3.1. Задача о распространение тепла в цилиндре конечных размеров

Классическая задача теплопроводности [4,5] приводит к исследованию уравнения параболического типа

$$\frac{\partial}{\partial t} U = a^2 \Delta U . \tag{126}$$

С учетом симметрии задачи оператор Лапласа Δ записывается в цилиндрических координатах

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} , \tag{127}$$

а искомая температура ищется как функция четырех независимых переменных $U(t, \rho, \varphi, z)$. Для примера рассмотрим однородную граничную задачу первого рода, то есть будем полагать, что на боковой поверхности цилиндра радиуса R ($\rho{=}R$), а также на его нижней ($z{=}0$) и верхней ($z{=}h$) крышках поддерживается температура, равная нулю:

$$U(t, R, \varphi, z) = U(t, \rho, \varphi, 0) = U(t, \rho, \varphi, h) = 0\,. \tag{128}$$

Начальное условие зададим с помощью некоторой функции F

$$U(0, \rho, \varphi, z) = F(\rho, \varphi, z)\,, \tag{129}$$

которая определена и непрерывна внутри цилиндра и обращается в нуль на его поверхности в согласии с граничными условиями (128). Следуя методу разделения переменных, ищем частные решения уравнения (126) в виде:

$$U(t, \rho, \varphi, z) = T(t)\ \mathcal{R}(\rho)\ \Phi(\varphi)\ Z(z)\,. \tag{130}$$

Подставив данное произведение в (126), выполнив операции дифференцирования и разделив всё уравнение на U, получим равенство

$$\frac{\dot{T}(t)}{Ta^2} = \frac{1}{\rho\mathcal{R}}\,[\rho\mathcal{R}'(\rho)]' + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi} + \frac{Z''(z)}{Z}\,. \tag{131}$$

Здесь для краткости точкой обозначена производная по времени. Левая часть равенства (131) не зависит ни от ρ, ни от φ, ни от z, а потому обязана быть константой. Логика подсказывает, что эта константа в принципе может быть положительной, нулевой и отрицательной. Однако только в последнем случае, когда константу можно обозначить как $-\lambda^2$, решение для временной функции $T(t)$

$$T(t) = T^* e^{-a^2\lambda^2 t} \tag{132}$$

экспоненциально спадает с течением времени. Это пример того, как физические мотивы накладывают ограничения на свободу математического моделирования. Продолжая такие рассуждения, мы вынуждены заключить, что последнее слагаемое в (131) также равно константе

$$\frac{Z''(z)}{Z} = const\,, \tag{133}$$

и эта константа должна быть определена из граничных условий $Z(0) = Z(h) = 0$. Если принять, что данная константа положительна, то есть $const = \kappa^2 > 0$, то решение (133) приобретает вид

$$Z(z) = C_1 \cosh \kappa z + C_2 \sinh \kappa z\,, \tag{134}$$

и никак не может обратиться в нуль на обеих границах интервала $(0, h)$. Если предположить, что константа равна нулю, то решение (133) примет вид

$$Z(z) = C_1 + C_2 z \tag{135}$$

и тоже не позволит удовлетворить граничным условиям. Если же константа отрицательна, то есть, $const = -k^2 < 0$, то решение

$$Z(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz \tag{136}$$

удовлетворит нулевым граничным условиям, если

$$k = \frac{\pi n}{h}\,, \qquad Z(z) = C_n \sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right). \tag{137}$$

Совершенно аналогично приходим к выводу, что

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi} = const\,, \tag{138}$$

однако теперь вместо граничных условий для функции Φ необходимо потребовать выполнение условий периодичности по полярному углу φ

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)\,. \tag{139}$$

Перебирая заново случаи с положительной, нулевой и отрицательной константой, неминуемо приходим к выводу, что только отрицательная константа $const = -m^2$ удовлетворяет требованию (139), причем m может быть только целым числом. Тогда функция $\Phi(\varphi)$ моментально находится

$$\Phi(\varphi) = C_m^{(1)} \cos m\varphi + C_m^{(2)} \sin m\varphi\,. \tag{140}$$

Возвращаясь к уравнению для функции $\mathcal{R}(\rho)$, подставим в (131) все найденные нами константы

$$\frac{1}{\rho\mathcal{R}}\left[\rho\mathcal{R}'(\rho)\right]' - \frac{m^2}{\rho^2} = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - \lambda^2 \tag{141}$$

и приведем полученное уравнение к виду

$$\rho^2\mathcal{R}'' + \rho\mathcal{R}' + \left[\left(\lambda^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)\rho^2 - m^2\right]\mathcal{R} = 0\,. \tag{142}$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять условию $\mathcal{R}(R) = 0$ на поверхности цилиндра, а по физическим соображениям эта функция обязана быть ограниченной внутри цилиндра, в частности, на оси симметрии $\rho = 0$.

В четвертый раз повторим рассуждения о константах.

Если $\lambda^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = -\gamma^2 < 0$, то уравнение (142) сводится к модифицированному уравнению Бесселя, и его решение имеет вид:

$$\mathcal{R}(\rho) = C_m^{(1)}\ I_m(\gamma\rho) + C_m^{(2)}\ K_m(\gamma\rho)\,, \tag{143}$$

где I_m и K_m - функции Бесселя мнимого аргумента. Как мы уже знаем, функция K_m неограниченно возрастает, если её аргумент стремится к нулю, и потому данная функция может входить в (143) только с нулевыми константами $C_m^{(2)}=0$. Мы знаем также, что у функции I_m нет вещественных корней при $x > 0$, а потому заставить решение (143) обратиться в нуль при $\rho = R$ невозможно, как невозможно было обратить в нуль гиперболические функции (134) на верхней и нижней крышке цилиндра одновременно.

Если $\lambda^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = 0$, но $m \neq 0$, уравнение (142) превращается в уравнение Эйлера, решение которого выражается через степенные функции

$$\mathcal{R}(\rho) = C_m^{(1)}\rho^m + C_m^{(2)}\rho^{-m}\,. \tag{144}$$

Данная функция ограничена в нуле только если $C_m^{(2)}=0$, но тогда возрастающая функция ρ^m не сможет обратиться в нуль при $\rho=R$.

Если $\lambda^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = 0$ и $m = 0$, то решение уравнения (142)

$$\mathcal{R}(\rho) = C_1 \log\rho + C_2 \tag{145}$$

принимает неограниченное значение на оси цилиндра.

Остается предположить, что $\lambda^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = \sigma^2 > 0$, тогда (142) сводится к уравнению Бесселя, и его общее решение имеет вид

$$\mathcal{R}(\rho) = C_m^{(1)} J_m(\sigma\rho) + C_m^{(2)}\ Y_m(\sigma\rho)\,. \tag{146}$$

Функции Вебера-Шлефли $Y_m(\sigma\rho)$, как мы специально подчеркивали в конце раздела 1.2.2., являются неограниченными при $\rho = 0$, и мы вновь обязаны принять, что $C_m^{(2)}$=0. Что же касается функций Бесселя первого рода $J_m(\sigma\rho)$, они имеют бесчисленное множество положительных вещественных корней и способны обеспечить обращение в нуль функции $\mathcal{R}(\rho)$ на поверхности цилиндра по аналогии с тем, как это удалось сделать с тригонометрическими функциями в (136)-(137). Полагая $J_m(\sigma R) = 0$, найдем, что $\sigma = \frac{\mu_i^{(m)}}{R}$, где символом $\mu_i^{(m)}$ обозначен i-ый по счету корень функции Бесселя индекса m.

Завершая построение решения исходного линейного уравнения теплопроводности, запишем следующую тройную сумму

$$U = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \exp\left\{-a^2\left[\left(\frac{\mu_i^{(m)}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right] t\right\} \times$$
$$\times J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}\rho}{R}\right)\sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right)\left[C_{imn}^{(1)}\cos m\varphi + C_{imn}^{(2)}\sin m\varphi\right]. \qquad (147)$$

Функция U удовлетворяет уравнению (126) по построению. Эта функция ограничена во всех точках внутри цилиндра для любого момента времени и периодична по полярному углу. При $z = 0$ и $z = h$ функция U обращается в нуль за счет множителя $\sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right)$. При $\rho = R$ найденная функция обращается в нуль, поскольку $J_m(\mu_i^{(m)}) = 0$. Оставшиеся неотождествленными константы $C_{imn}^{(1)}$ и $C_{imn}^{(2)}$ могут быть найдены с помощью начального условия (129). Действительно, полагая $t = 0$ в (147), получим соотношение

$$F(\rho,\varphi,z) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}\rho}{R}\right) \times$$
$$\times \sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right)\left[C_{imn}^{(1)}\cos m\varphi + C_{imn}^{(2)}\sin m\varphi\right]. \qquad (148)$$

Используя соотношения ортогональности-нормировки для тригонометрических функций

$$\int_0^{2\pi}\cos m'\varphi\cos m\varphi d\varphi = \pi\delta_{mm'}\,, \quad \int_0^{2\pi}\cos m'\varphi\sin m\varphi d\varphi = 0\,, \qquad (149)$$

$$\int_0^h dz\sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi n' z}{h}\right) = \frac{h}{2}\delta_{nn'}\,, \qquad (150)$$

легко получить первое интегральное следствие (148):

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\cos m\varphi\int_0^h dz\sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right) F(\rho,\varphi,z) = \frac{\pi h}{2}\sum_{i=1}^{\infty} C_{imn}^{(1)} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}\rho}{R}\right). \qquad (151)$$

Воспользовавшись далее условием ортогональности - нормировки (122) для функций Бесселя первого рода, получим набор коэффициентов $C^{(1)}_{imn}$:

$$C^{(1)}_{imn} = \frac{4}{\pi h R^2 J^2_{m+1}\left(\mu_i^{(m)}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^h \rho d\rho d\varphi dz F(\rho, \varphi, z) J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}\rho}{R}\right) \cos m\varphi \sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right). \tag{152}$$

Следует особо напомнить, что согласно правилам разложения в ряд Фурье формула (152) справедлива только для $m \geq 1$, а для $m = 0$ следует использовать формулу с половинным коэффициентом

$$C^{(1)}_{i0n} = \frac{2}{\pi h R^2 J^2_{1}\left(\mu_i^{(0)}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^h \rho d\rho d\varphi dz F(\rho, \varphi, z) J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}\rho}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right). \tag{153}$$

Коэффициенты

$$C^{(2)}_{imn} = \frac{4}{\pi h R^2 J^2_{m+1}\left(\mu_i^{(m)}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^h \rho d\rho d\varphi dz F(\rho, \varphi, z) J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}\rho}{R}\right) \sin m\varphi \sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right) \tag{154}$$

находятся аналогично. Поставленная задача решена, причем при её решении мы существенно использовали свойства функций Бесселя первого и второго рода, а также функций Бесселя мнимого аргумента.

3.3.2. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца в сферической системе координат

Целый ряд физических задач приводит к уравнению Гельмгольца (Helmholtz)

$$\Delta U + k^2 U = 0\,. \tag{155}$$

Здесь k - некоторая вообще говоря ненулевая константа; если $k = 0$, уравнение Гельмгольца превращается в уравнение Лапласа (Laplace). В сферической системе координат уравнение Гельмгольца удобно записать в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi} U + k^2 U = 0\,, \tag{156}$$

где символом $\Delta_{\theta\varphi}$ обозначена угловая часть оператора Лапласа Δ:

$$\Delta_{\theta\varphi} \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,. \tag{157}$$

Не останавливаясь на деталях, напомним, что так называемые сферические функции $Y_{mn}(\theta,\varphi)$ являются собственными функциями данного оператора, то есть, удовлетворяют соотношению

$$\Delta_{\theta\varphi}Y_{mn}(\theta,\varphi) = -n(n+1)Y_{mn}(\theta,\varphi)\,, \tag{158}$$

где n - целые положительные числа. Сферические функции [4,5]

$$Y_{mn}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\left(C_m^{(1)}\cos m\varphi + C_m^{(2)}\sin m\varphi\right) \tag{159}$$

выражаются через присоединенные полиномы Лежандра $P_n^{(m)}(\cos\theta)$. Используя метод разделения переменных, представим решение уравнения (155) в виде суммы

$$U(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Re_n(r)Y_{mn}(\theta,\varphi)\,, \tag{160}$$

тогда радиальные функции $\Re_n(r)$ обязаны удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\Re_n + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]\Re_n = 0\,. \tag{161}$$

Заменой искомой функции $\Re_n = \frac{1}{\sqrt{r}}\mathcal{Y}_n(r)$ уравнение (161) сводится к уравнению Бесселя полуцелого индекса

$$r^2\mathcal{Y}_n''(r) + r\mathcal{Y}_n'(r) + \left[k^2r^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathcal{Y}_n = 0\,. \tag{162}$$

Если $k \neq 0$, общее решение уравнения (161) имеет вид

$$\Re_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[C_n^{(1)}J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + C_n^{(2)}Y_{n+\frac{1}{2}}(kr)\right]\,. \tag{163}$$

Если $k = 0$, то ключевое уравнение (161) превращается в уравнение Эйлера, а решение последнего выражается через степенные функции

$$\Re_n(r) = \tilde{C}_n^{(1)}r^n + \tilde{C}_n^{(2)}r^{-(n+1)}\,. \tag{164}$$

Коэффициенты $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $\tilde{C}_n^{(1)}$, $\tilde{C}_n^{(2)}$, $C_m^{(1)}$ и $C_m^{(2)}$ находятся из решения соответствующей граничной задачи.

3.3.3. Функции состояния релятивистского газа

В теории релятивистских статистических систем функция

$$f(p) = A \exp\left\{-\frac{c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{k_BT}\right\} \tag{165}$$

описывает изотропное однородное распределения частиц по импульсам p, где $p \equiv \sqrt{(\vec{p})^2}$, m - масса покоя частицы, c - скорость света, k_B- постоянная Больцмана, T- температура, A- нормировочный множитель. Число частиц в единице объема N, плотность энергии E, давление в системе $\mathcal{P}$ определяются следующими интегралами с функцией распределения (165):

$$N = 4\pi \int\limits_0^\infty p^2 dp\ f(p)\,, \tag{166}$$

$$E = 4\pi c \int\limits_0^\infty p^2 dp \sqrt{m^2c^2+p^2}\ f(p)\,, \tag{167}$$

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi}{3} \int\limits_0^\infty \frac{p^4}{\sqrt{m^2c^2+p^2}}\ dp\ f(p)\,. \tag{168}$$

С помощью замены переменной интегрирования $p = mc\sinh t$ удается преобразовать квадратный корень к гиперболическому косинусу $mc\cosh t$, и искомые величины представляются интегралами

$$N = 4\pi A m^3 c^3 \int\limits_0^\infty dt \sinh^2 t \cosh t e^{-\lambda \cosh t}\,, \tag{169}$$

$$E = 4\pi A m^4 c^5 \int\limits_0^\infty dt \sinh^2 t \cosh^2 t e^{-\lambda \cosh t}\,, \tag{170}$$

$$\mathcal{P} = \frac{4}{3}\pi m^4 c^5 A \int\limits_0^\infty dt \sinh^4 t e^{-\lambda \cosh t}\,, \tag{171}$$

где безразмерный параметр $\lambda = \frac{mc^2}{k_BT}$ задает отношение энергии покоя частиц к их средней кинетической энергии. Согласно (107) из интегрального представления функций Макдональда $K_\nu(\lambda)$ следует, что

$$K_1(\lambda) = \lambda \int\limits_0^\infty dt \sinh^2 t e^{-\lambda \cosh t}\,, \tag{172}$$

$$K_2(\lambda) = \frac{1}{3}\lambda^2 \int\limits_0^\infty dt \sinh^4 t e^{-\lambda \cosh t}\,. \tag{173}$$

Учитывая также дифференциальное соотношение

$$-\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{K_1(\lambda)}{\lambda}\right] = \frac{K_2(\lambda)}{\lambda} \tag{174}$$

вытекающее из (62), и рекуррентное соотношение

$$K_3(\lambda) - K_1(\lambda) = \frac{4}{\lambda}K_2(\lambda)\,, \tag{175}$$

следствие формулы (63), приходим к следующим трем выводам. Во-первых, из формулы для плотности числа частиц находим нормировочный коэффициент A:

$$N = 4\pi A(mc)^3\frac{K_2(\lambda)}{\lambda} \quad \rightarrow \quad A = \frac{\lambda\ N}{4\pi m^3c^3K_2(\lambda)}\,. \tag{176}$$

Во-вторых, видим, что давление пропорционально плотности N и температуре T:

$$\mathcal{P} = 4\pi m^4c^5A\frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} = N\frac{mc^2}{\lambda} = Nk_BT\,. \tag{177}$$

Наконец, плотность энергии выражается через отношение функций Макдональда:

$$E = 4\pi Am^4c^5\int_0^\infty \sinh^2 t(1+\sinh^2 t)dte^{-\lambda\cosh t} =$$

$$= 4\pi Am^4c^5\left[\frac{K_1}{\lambda}+\frac{3K_2}{\lambda^2}\right] = Nk_BT\left[\lambda\ \frac{K_3(\lambda)}{K_2(\lambda)} - 1\right]\,. \tag{178}$$

Удельная энтальпия (теплосодержание) системы h равна в этом случае

$$h \equiv \frac{E+\mathcal{P}}{N} = mc^2\ \frac{K_3(\lambda)}{K_2(\lambda)}\,. \tag{179}$$

Подводя итог, подчеркнём ещё раз, что функции Макдональда, то есть модифицированные функции Бесселя, играют фундаментальную роль при описании состояния релятивистских кинетических систем.

Литература

1. Г.Н. Ватсон. *Теория бесселевых функций.* Ч.1. М.: ИЛ, 1949.

2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции*, Т.1,2. М.: Наука, 1966.

3. Н.Н. Лебедев. *Специальные функции и их приложения.* М.: ГИФМЛ, 1963.

4. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1977.

5. Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов *Основные дифференциальные уравнения математической физики.* М.: ГИФМЛ, 1962.

6. Э. Камке *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1976.

7. Л.И. Чибрикова. *Избранные главы аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Казанский Фонд "Математика". Казань. 1996.

Содержание